FISICA MEDICA

DR. LUIS VARGAS RODRIGUEZ

Especialista en medicina nuclear
Profesor titular de física médica
Universidad Veracruzana

2007

CAPITULO 1
Matemáticas básicas.

Las matemáticas, tanto puras como aplicadas, no son más que conceptos en forma abreviada, de manera parecida a la estenografía. Esto es cierto, ya sea que uno considere el formalismo abstracto de las matemáticas puras, las cuales nos dicen simplemente que una cosa sigue a otra en una cierta dirección (lógica), o la expresión concisa de una idea, condición o situación en las matemáticas aplicadas. En esta era de las computadoras, se puede admirar la efectividad con que las matemáticas pueden resolver problemas muy complejos.

La representación matemática de una idea o condición es básicamente, en términos de números, un simbolismo que nos debe ser familiar, como lo es la simple aritmética. A medida que los conceptos de álgebra se desarrollen en este capítulo, se demostrará que las representaciones numéricas pueden utilizarse aunque los valores actuales se desconozcan. Las formas y curvas también se pueden describir con representaciones algebraicas.

Dentro del cálculo, existen dos herramientas mayores; la diferenciación y la integración, las cuales abren técnicas poderosas para describir cambios físicos.

Las matrices y vectores son herramientas extremadamente útiles cuando se describen condiciones y propiedades que tienen tanto magnitud como dirección. Cualquier tabulación de datos se puede almacenar más fácilmente en forma de matriz. La aplicación de los principios de las matrices es importante para cualquier manipulación de datos tabulares. El almacenamiento en computadoras de los datos obtenidos por radiografía digital o gammacámaras requieren del uso de los conceptos de matrices y vectores.

1.1 ARITMETICA.

1.1.2. Números, su representación y operación.

Bajo el riesgo de parecer trivial, y sin tratar de dar una definición filosófica de un número, trataremos brevemente de revisar las clases de números que más comúnmente encontramos. El grupo mayor se denomina números reales que son todos los números positivos y negativos, incluyendo fracciones y números decimales. Dentro de la esfera de números reales están los números racionales los cuales son representables como fracciones de números enteros y los números irracionales que son aquellos que no son representables como fracción de dos números enteros; estos números pueden representarse como fracciones decimales infinitas no periódicas.
Una subdivisión de los números racionales es la de los enteros, que son todos los positivos, negativos y el cero, que no tienen fracción. Los miembros positivos de los enteros se denominan números de contar.

Curiosidades:
Narcisista: Número de n dígitos que resulta ser igual a la suma de las potencias de orden n de sus dígitos. Ejemplo: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$.
Omirp: Número primo que al invertir sus dígitos da otro número primo. Ejemplo : 1597 y 7951 son primos.
Vampiro: Número que se obtiene a partir del producto de dos números obtenidos a partir de sus dígitos. Ejemplo: 2187 = 27 x 81.

Leyes de la aritmética. La adición, sustracción, multiplicación y división son operaciones familiares en las cuales utilizamos números. Estas operaciones obedecen las leyes básicas de la aritmética (leyes básicas de la aritmética) entre las que se incluyen las siguientes:

ley conmutativa $a + b = b + a$
$a \times b = b \times a$
$2 + 3 = 3 + 2$
$2 \times 3 = 3 \times 2$

ley asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
$(3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1)$
$(3 \times 2) \times 1 = 3 \times (2 \times 1)$

ley distributiva $a(b + c) = ab + ac$
$3(2 + 1) = 3 \times 2 + 3 \times 1$

1.1.2 Indices y proporciones

Dos de los conceptos más útiles en la utilización de números como herramientas descriptivas son los índices y las proporciones. Un índice denota tamaño relativo y puede expresarse como una fracción. Si hay tres hombres y 6 mujeres que padecen una determinada enfermedad, el índice entre hombres y mujeres es de 1 a 2, y con frecuencia se escribe 1:2 o 1/2, esto es, hay la mitad de hombres enfermos en comparación con las mujeres.

Una proporción es una igualdad de dos índices o fracciones. Una igualdad es "1 es a 2 como 3 es a 6", o 1/2 = 3/6 ó 1:2 = 3:6. Esto es, una proporción es una declaración acerca de la relación de una cantidad a otra. Por ejemplo, podemos leer la proporción ya anotada diciendo que alguna cantidad a varía de 1 a 2, y entonces, alguna otra cantidad *b* se incrementa de 3 a 6. En otras palabras, la cantidad *a* es directamente proporcional a la cantidad *b*. Cuando la primera cantidad se cambia por algún índice, la segunda cantidad cambia por el mismo índice.

Una relación inversa también es posible, y se llama proporción inversa, lo cual significa que si una cantidad cambia por un cierto índice, otra cantidad cambia por el índice inverso. Si a se incrementa de 1 a 2, entonces b disminuye de 2 a 1; o, más generalmente, si *a* se duplica entonces *b* se divide. Si la presión de un gas se duplica (y la temperatura se mantiene constante), el volumen del gas se reduce.

1.1.3 Exponentes

Si un número real *a* se multiplica por él mismo, el producto $a \cdot a$ se representa a^2, que se lee "*a* cuadrada" o "*a* a la segunda potencia". Si el producto es $a \cdot a \cdot a$, se representa a^3, que se lee " *a* cúbica" ó "*a* a la tercera potencia". Es útil la generalización para el producto de $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.... (*a* multiplicado por él mismo *n* veces) y equivale a a^n, en donde *n* es el exponente y *a* la base. a^n es *a* a la *n*ésima potencia. La notación algebraica *n* con frecuencia se utiliza para representar un exponente general, al igual que otras letras elegidas al azar.

Nuevamente, hay ciertas leyes que gobiernan las operaciones con exponentes (operaciones con exponentes).

Multiplicación: $a^n \, . \, a^p = a^{n+p}$

$2^3 \, . \, 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

División: $a^n/a^p = a^{n-p}$

$2^3/2^2 = 2^{3-2} = 2^1$

Exponenciación: $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

Las operaciones anteriores son verdaderas incluso si el exponente es *-n* o *1/n*. En el caso de *-n*

$a^{-n} = 1/a^n$

esto es, un exponente negativo indica un recíproco.

Para 1/n

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

esto es, la *n*ésima raíz de *a*. El lector puede verificar las leyes anteriores sustituyendo las fórmulas con valores numéricos.

En este punto, es conveniente mencionar que los científicos hacen uso extensivo de las formas exponenciales en la que con frecuencia de denomina notación científica. Por ejemplo, tomemos el número 23.257. Una representación igualmente válida es 2.3257×10^1. El número 3267.32 se puede representar como 3.26732×10^3. Si un número es menor de 1, por ejemplo, 0.000123, se puede expresar como 1.23×10^{-4}. La notación especial científica representa cualquier número entre 1 y 10 veces el número 10 elevado a la potencia apropiada. Supóngase que un determinado tejido tiene 231,500 células. En notación científica se escribiría como 2.315×10^5 células.

1.1.4 Logaritmos

Consideremos otra vez la representación básica de un número base elevado a una potencia, $a^b = N$. Esta expresión se puede también representar como $\log_a N = b$, lo que se lee " el logaritmo de *N* a la base *a* es *b*"; esto es, un logaritmo es un exponente. El número base que con mayor frecuencia se utiliza es el 10; es decir *a* = 10. Consideremos la siguiente tabla, en donde se enlista la base 10 elevada a varias potencias y sus correspondientes notaciones en términos de logaritmos.

$10{,}000 = 10^4$	log10 10,000 = log10$_4$ = 4
$1{,}000 = 10^3$	log10 1,000 = log10$_3$ = 3
$100 = 10^2$	log10 100 = log10$_2$ = 2
$10 = 10^1$	log10 10 = log10$_1$ = 1
1 = 100	log10 10 = log10$_0$ = 0
$0.1 = 10^{-1}$	log10 0.1 = log10$_{-1}$ = -
0.01 = 10-2	log10 0.01 = log10 -2 = -2
0.001 = 10-3	log10 0.001 = log10 -3 = -3

$0.0001 = 10^{-4}$ $\log10\ 0.0001 = \log10_{-4} = -4$

Si se representan en notación científica, todos los números podrían representarse como números desde 1 a 10 veces 10 elevados a la potencia apropiada.

Ahora se mostrará como se puede expresar cualquier número como un exponente de 10. Por ejemplo, todos los números entre 0 y 10 yacen entre 10^0 y 10^1, los números entre 10 y 1000 yacen entre 10^1 y 10^3, y así sucesivamente. Exprese el número 2 como un exponente de 10 y un logaritmo de 10; como 2 yace entre 10^0 y 10^1, el exponente será una fracción entre 0 y 1; esto es, $2 = 10^{0.3010}$, o $\log 2 = 0.3010$.

Otros ejemplos son:

$17 = 10^{1.2304}$ $\log 17 = 1.2304$

$132 = 10^{2.1206}$ $\log 132 = 2.1206$

Las leyes de operación de los logaritmos son las mismas que las de los exponentes:

Multiplicación: $2 \times 17 = 10^{0.3010} \times 10^{1.2304} = 10^{1.5314}$

$\log 2 + \log 17 = 0.3010 + 1.2304 = 1.5314$

División: $17/2 = 10^{1.2304}/10^{0.3010} = 10^{0.9294}$

$\log 17 - \log 2 = 1.2304 - 0.3010 = 0.9294$

Exponenciación: $22 = (10^{0.3010})^2 = 10^{2 \times 0.3010}$

$\log 22 = 2 \times \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

1.1.5 Logaritmos Naturales.

En la sección anterior se explicó que los logaritmos son una consecuencia directa de una expresión exponencial. Se debe aclarar que aunque se mencionaron los logaritmos de base 10, es posible expresar logaritmos en cualquier número base.

En muchas expresiones científicas es conveniente expresar los logaritmos a la base *e*, en donde *e*=2.71828···, es decir si

$e^x = N$

$\log_e N = x$

o $\ln N = x$

en donde *ln* denota un logaritmo a la base *e*. Estos logaritmos se llaman logaritmos naturales (logaritmos naturales) y también se tabulan en forma similar a los de la base 10.

El logaritmo de 1 en cualquier base es cero.
También, el logaritmo de

$\log_a a = 1$ $a^1 = a$

1.2 Reglas fundamentales para la manipulación de símbolos.

1.2.1 Algebra

El álgebra es una herramienta para resolver problemas en donde una cantidad bajo determinadas condiciones es desconocida. Estas cantidades desconocidas se designan con letras del alfabeto, y las operaciones aritméticas se pueden realizar con ellas al igual que con cualquier número. Las expresiones algebraicas obedecen todas las leyes dadas en la sección 1.1.1. En el estudio de la ciencia, las cantidades desconocidas tienen significado físico ya sea que corresponda a la medida de una propiedad física o describa una situación física.

El álgebra proporciona una notación taquigráfica adicional para describir un problema particular. Las cantidades desconocidas se designan con una letra, y las ecuaciones se elaboran de tal forma que describan el grupo de condiciones con las cuales cada uno está interesado.

Ejemplo: Si un vial contiene 6 mg de alguna molécula de medio de contraste en 36 cc. ¿ Cuál es el volumen de 1 mg ?. Asumamos que x = el volumen de 1 mg. La ecuación que describe esta situación es

$6x = 36$

Entonces, la solución para x es

$x = 36/6 = 6$ cc.

En la manipulación algebraica, la cantidad o cantidades desconocidas se conocen como variables. En una ecuación completamente general, la desconocida puede asumir muchos valores compatibles con las condiciones de las ecuaciones.

1.2.2 Ecuaciones con una variable

Limitémonos primero a las ecuaciones que involucran una variable desconocida:

Ecuaciones lineales. Si una variable aparece en una expresión algebraica elevada sólo a la primera potencia, se dice que es lineal. De la misma forma, para una ecuación lineal

$$ax + b = 0,$$

se dice que la ecuación es de primer grado en x.

Ecuaciones cuadráticas. Si la variable está elevada a la segunda potencia, la ecuación es cuadrática, o es de segundo grado en x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$

Ecuaciones de mayor grado. Si la ecuación involucra una variable elevada a la tercera potencia, la ecuación se denomina cúbica o de tercer grado. Si la variable se eleva a la *n*ésima potencia, la ecuación es de *n*ésimo grado.

1.2.3 Funciones. Ecuaciones con más de una variable.

Con frecuencia en una ecuación puede aparecer más de un valor o variable desconocidos, específicamente, hay condiciones en donde dos o más cantidades son desconocidas; por ejemplo:

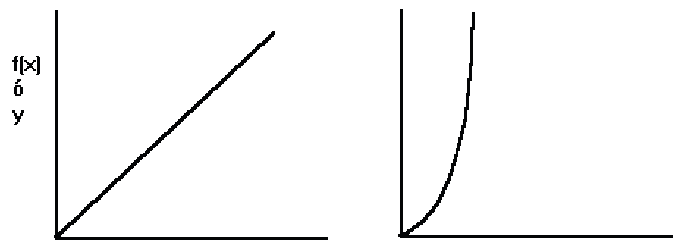
$y = 3x$ y es tres veces el valor de x

Note que cualquier número puede sustituír el valor de x, y haciéndolo se puede determinar el valor de y. Cuando el valor de una variable se determina especificando el valor de otra variable, se dice que la primera es función de la segunda; esto es, y es una función de x. Esto se puede expresar más generalmente como una función de x, simbolizada f(x), es igual a 3x. La función es determinada propiedad que es tres veces *x*. Si la ecuación ya citada en y es reescrita como $f(x) = 3x$, se lee como “la función es el valor de f(x) a x “. Si x = 2 entonces

$$f(x) = 6$$
$$ó\ f(2) = 3(2) = 6$$

1.2.4 Graficado de funciones

Como se ha mencionado, la expresión $f(x)=3x$ implica que hay muchos valores de x que uno puede seleccionar y para los cuales hay un valor correspondiente de f(x). Esto es, se puede definir una función graficándola. Una gráfica de f(x) contra x sirve para definir pictóricamente todos los valores de x y sus correspondientes valores de f(x). Ver las figuras siguientes que sirven como ejemplos típicos:



Función linear   Función no linear

Graficas de f(x) ó y contra x.

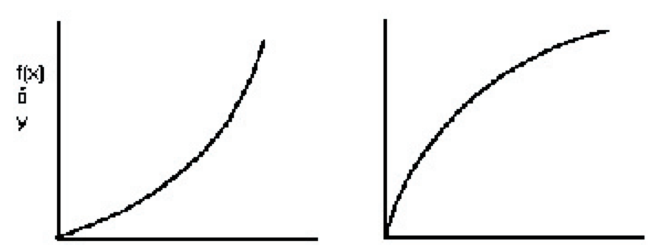
Funciones exponenciales y logarítmicas. Con frecuencia las funciones que se encuentran en el ambiente científico son funciones exponenciales o logarítimicas:

$$f(x) = y = ax$$
$$f(x) = y = ex$$

ó

$$f(x) = y = \log x$$
$$f(x) = y = \ln x$$

A continuación se muestran ejemplos de gráficas exponenciales y logarítmicas



Función exponencial e^x contra x   Función log x contra x

Decaimiento exponencial típico para el Carbono^{11} con vida media de 1,224 segundos.

Funciones Escalonadas y continuas. Nuestra definición general de una función no separa las funciones escalonadas de las continuas. Una función escalonada es discontinua sobre un rango específico, de aquí su nombre. Estas funciones son ejemplos visuales de las clases de datos que se generan en muchos procesos físicos.
Las funciones escalonadas representan datos digitales, o la medida de algunas propiedades físicas en varios intervalos. Por ejemplo, un médico que observa a su paciente en diferentes intervalos está generando datos digitales.

Las funciones continuas representan datos análogos, o la medida continua de una propiedad durante un intervalo. Si el médico observara a su paciente continuamente durante las 24 horas del día, él estaría obteniendo datos análogos.

Las funciones escalonadas se pueden considerar como funciones precisas y constantes. Son constantes por lo menos un intervalo. Los intervalos de las funciones escalonadas son incrementos discretos o definidos. El intervalo de x1 a x2 se puede representar como Dx=x2 - x1, donde el símbolo delta D representa un cambio que se puede medir desde x1 a x2. Con frecuencia queremos representar la suma de muchos intervalos o incrementos, por ejemplo:

Dx1 + Dx2 + Dx3 + · · · + Dxn
en donde Dx1= x2 - x1, . . .

Esta suma se puede representar en notación corta como:

n
S = Dxn
n=1

la cual se lee: "La sumatoria de todas las Dx entre x1 y xn.". El símbolo de sumatoria es la letra griega mayúscula sigma (S); los números (o letras) en la parte inferior y superior de la sigma nos dicen el rango en el cual estamos sumando. El número inferior es el límite inferior y el de arriba el límite superior. Esta notacion de sumatoria es perfectamente general. Se debe enfatizar que la sumatoria es la adición de parámetros de medidas discretas.
Algunos otros ejemplos de sumatorias son:

3
S = n2 = 12 + 22 + 32
n=1

4
S = Xk = X1 + X2 + X3 + X4
k=1

5
S = n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
n=1